Variable Compleja
Examen II

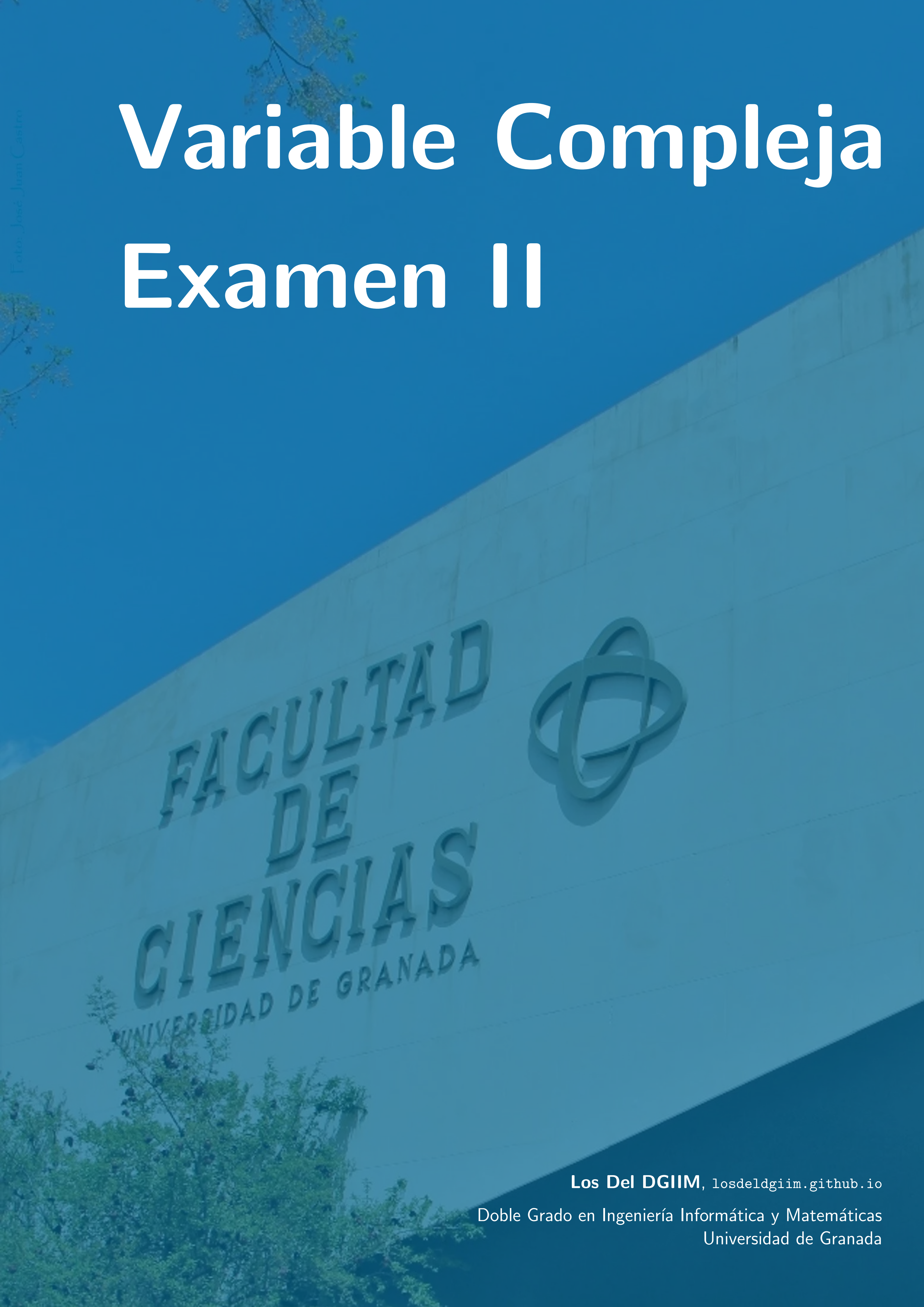

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 7 de Mayo de 2024.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω. Deducir que siguiente función g es continua en Ω y calcular $\int_{C(\pi,1)} g(z)\, dz$:

$$\begin{array}{rccl} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \end{array}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la siguiente función f:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & ze^{\overline{z}} \end{array}$$

Ejercicio 3 (3 puntos)**.**

1. [**1.5 puntos**] Calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-3)^3}\, dz$$

2. [**1.5 puntos**] Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

3. [**1.5 puntos Extra**] Probar que, de hecho, $f = g$.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^z}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Re} z>1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω. Deducir que siguiente función g es continua en Ω y calcular $\displaystyle\int_{C(\pi,1)} g(z)\;dz$:

$$\begin{aligned} g:\ \Omega &\longrightarrow \mathbb{C}\\ z &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\end{aligned}$$

Estudiamos en primer lugar la convergencia uniforme. Sea $K\subset\Omega$ compacto. Como la parte real de z es continua, $\exists M\in\mathbb{R}$ tal que:

$$M=\min\{\operatorname{Re} z : z\in K\}>1$$

Entonces, para todo $z\in K$ se tiene que:

$$\left|\frac{1}{n^z}\right|=\frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}\leqslant\frac{1}{n^M}\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

Como $M>1$, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^M}$ converge, y por el Test de Weierstrass, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^z}$ converge uniformemente en K.

Para la convergencia absoluta, consideramos $z\in\Omega$ fijo. Como $\{z\}$ es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en $\{z\}$. Como z es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de Ω.

Probaremos ahora la continuidad de g en Ω, algo que no tenemos directo por no ser Ω compacto. Fijado $z\in\Omega$, por ser Ω abierto $\exists R\in\mathbb{R}^+$ tal que $D(z,R)\subset\Omega$. Entonces, tomando $r={}^R\!/\!_2$ se tiene que $z\in\overline{D}(z,r)\subset\Omega$, con $K=\overline{D}(z,r)$ compacto. Como K es compacto y el término general de la serie de g está formado por funciones continuas para todo $n\in\mathbb{N}$, la convergencia uniforme de la serie en K nos garantiza que g es continua en $z\in K$. Como z era arbitrario en Ω, se concluye que g es continua en Ω.

Por último, calcularemos dicha integral. Como $\overline{D}(\pi,1)$ es compacto, la convergencia es uniforme. Por tanto, tenemos que:

$$\int_{C(\pi,1)} g(z)\;dz=\int_{C(\pi,1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\;dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{C(\pi,1)}\frac{1}{n^z}\;dz\overset{(*)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}0=0$$

donde en $(*)$ hemos usado que el integrando es holomorfo en Ω, y como Ω es estrellado, por el Teorema Local de Cauchy, este admite primitiva en Ω. Como $C(\pi,1)$ es un camino cerrado, dicha integral se anula.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la siguiente función f:

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ z &\longmapsto z e^{\overline{z}}\end{aligned}$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Con vistas a aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, definimos las siguientes funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \operatorname{Re}(f(x+iy)) = \operatorname{Re}((x+iy)e^{x-iy}) = \operatorname{Re}((x+iy)(e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y))) \\
&= e^x \operatorname{Re}(x\cos y + y \operatorname{sen} y + i(y\cos y - x \operatorname{sen} y)) = e^x(x\cos y + y \operatorname{sen} y) \\
v(x,y) &= \operatorname{Im}(f(x+iy)) = e^x(y\cos y - x \operatorname{sen} y)
\end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas parciales de u y v:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= e^x\left(x\cos y + y \operatorname{sen} y + \cos y\right) \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= e^x\left(-x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y\cos y\right) \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= e^x\left(y\cos y - x \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y\right) \\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= e^x\left(-y \operatorname{sen} y + \cos y - x\cos y\right)
\end{aligned}$$

La primera ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\
\cancel{e^x}\left(x\cos y + y \operatorname{sen} y + \cancel{\cos y}\right) &= \cancel{e^x}\left(-y \operatorname{sen} y + \cancel{\cos y} - x\cos y\right) \\
2y \operatorname{sen} y + 2x\cos y &= 0 \\
y \operatorname{sen} y + x\cos y &= 0
\end{aligned}$$

La segunda ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\
\cancel{e^x}\left(-x \operatorname{sen} y + \cancel{\operatorname{sen} y} + y\cos y\right) &= -\cancel{e^x}\left(y\cos y - x \operatorname{sen} y - \cancel{\operatorname{sen} y}\right) \\
2y\cos y - 2x \operatorname{sen} y &= 0 \\
y\cos y - x \operatorname{sen} y &= 0
\end{aligned}$$

Como vemos, la resolución de dichas ecuaciones no es trivial, por lo que optamos por otro camino.

Otra forma

Fijado $z \in \mathbb{C}$, veamos si f es derivable en z. Para ello, distinguimos en función de si $z = 0$ o no.

- <u>Caso $z \neq 0$</u>:
  Sea g la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc}
g: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & z & \longmapsto & e^{\overline{z}}
\end{array}$$

Supuesto que f sea derivable en z entonces g sería derivable en z, puesto que:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}$$

Veamos no obstante que g no es derivable en z.
Definimos $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \operatorname{Re}(g(x + iy)) = \operatorname{Re}(e^{x-iy}) = e^x \cos(-y) \\
v(x, y) &= \operatorname{Im}(g(x + iy)) = \operatorname{Im}(e^{x-iy}) = e^x \operatorname{sen}(-y)
\end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas parciales de u y v:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos(-y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = e^x \operatorname{sen}(-y) \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \operatorname{sen}(-y) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -e^x \cos(-y)
\end{aligned}$$

La primera ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos(-y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -e^x \cos(-y)$$

Para que esto se de, es necesario que $e^x = 0$ (lo cual no se da) o que $\cos(-y) = \cos(y) = 0$.
La segunda ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = e^x \operatorname{sen}(-y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -e^x \operatorname{sen}(-y)$$

Para que esto se de, es necesario que $e^x = 0$ (lo cual no se da) o que $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen}(y) = 0$.
Como no es posible que el seno y el coseno reales se anulen simultáneamente, se concluye que g no es derivable en z.
Por tanto, como g no es derivable en z, f tampoco lo es.

- Caso $z = 0$:
  Lo calcularemos por la definición formal.

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{z e^{\overline{z}}}{z} = \lim_{z \to 0} e^{\overline{z}} = \exp\left(\lim_{z \to 0} \overline{z}\right) = \exp\left(\overline{\lim_{z \to 0} z}\right) = \exp\left(\overline{0}\right) = \exp(0) = 1$$

donde hemos usado la continuidad de la exponencial y de la conjugación.
Por tanto, f es derivable en 0 y $f'(0) = 1$.

Por tanto, f es derivable en 0 y no es derivable en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 3 (3 puntos).

1. **[1.5 puntos]** Calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-3)^3}\, dz$$

Definimos la función f como:

$$\begin{array}{rccc} f: & D(0,2) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{\cos(z)}{(z-3)^3} \end{array}$$

Como f es racional, $f \in \mathcal{H}(D(0,2))$. Por tanto, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que:

$$\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i \cdot f(0) = -\frac{2\pi}{27} \cdot i$$

2. **[1.5 puntos]** Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

Como son funciones enteras, para cada $z \in D(0,1)$ se tiene por la fórmula de Cauchy para la circunferencia que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{g(w)}{w-z}\, dw = g(z)$$

Además, para cada $z \in \mathbb{T}$ también se tiene por hipótesis que $f(z) = g(z)$. Por tanto, $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

3. **[1.5 puntos Extra]** Probar que, de hecho, $f = g$.

Si consideramos las restricciones a $\Omega = \overline{D}(0,1)$, se tiene que:

$$f_{|\Omega} = g_{|\Omega}$$

Por el carácter local de la derivabilidad, se tiene que:

$$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por otro lado, como f, g son funciones enteras, por el Teorema de Cauchy son analíticas en $\mathbb{C}$. De hecho, considerando el desarrollo de taylor centrado en el origen, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$